NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 1

ČÍSLO ZLOŽKY

ZÁKLADY VARIAČNÉHO POČTU

① Úvod (pojem variačného počtu, oblasť skúmania)

⇒ VP vznikol v mechanike a je rozvíjaný v matematike

⇒ Skúma stacionárne hodnoty funkcionálu

⇒ Skúmaný dej možno matematicky popísať funkcionálom (funkcia funkcií). Pre určité významné stavy nadobúda daný funkcionál maximum alebo minimum

⇒ Pr.: V rovnovážnom stave nadobúda potenciálna energia poddajného telesa minimum.

⇒ VP skúma podmienky stacionárnosti funkcionálov rôzneho typu.

② Základná úloha mechaniky poddajného telesa

Príklad funkcionálu:

$$u = u(x) \Rightarrow J[u] = \int_a^b [u(x)]^2 dx$$

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 2

ČÍSLO ZLOŽKY

Funkcionál $J[u]$ je funkciou funkcie $u(x)$ ako celku a pre jej rôzne tvary nadobúda rôzne konkrétne hodnoty.

Otázka je, pre akú funkciu $u(x)$ nadobúta tento funkcionál minimálnu resp. maximálnu hodnotu.

$u_i(x) = ?$ $\qquad$ $u_j(x) = ?$

Deformačný stav telesa možno popisať vektorom posunutia $u = u(x, y, z)$ a tenzorom deformácie $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. (x_i), $i = 1, 2, 3$

Možno zostaviť funkcionál $F(x, u, u')$ pre funkciu posunutia $u = u(x)$ za daných okrajových podmienok.

Hľadaním extrému (minima) funkcionálu nájdeme neznáme posunutia bodov telesa.

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 3

ČÍSLO ZLOŽKY

ÚLOHA:

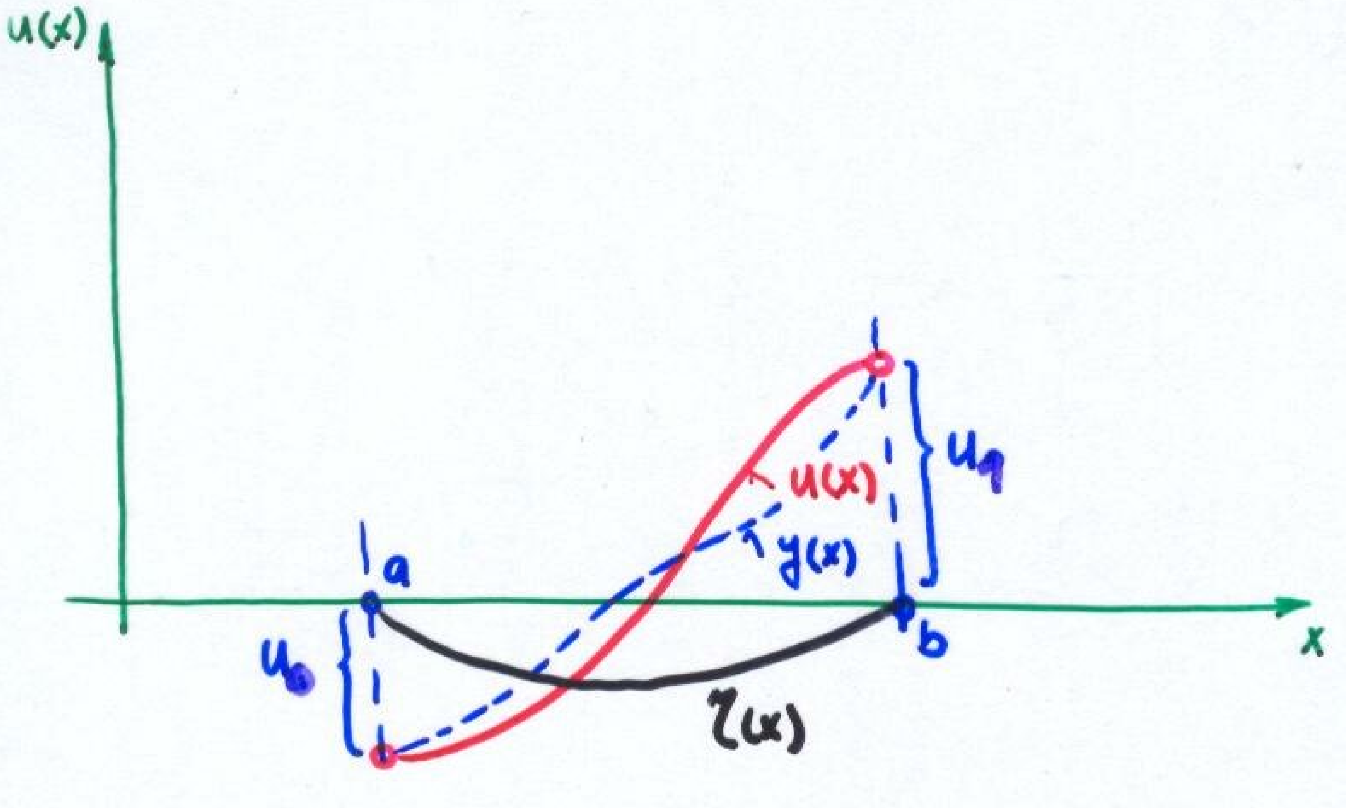
Uvažujme funkcionál

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, \dot{u})\,dx$$

$u = u(x)$ je spojitá funkcia, nech má spojitú 1. aj 2. deriváciu.

Okrajové podmienky: $u(a) = u_0$
$u(b) = u_1$

Pre aké $u = u(x)$ nadobudne $J[u] \to \min$



Nech funkcia $u(x) = y(x)$ minimalizuje funkcionál

$$\int_a^b F(x, u, \dot{u})\,dx = J[u] \to \min$$

$$\Rightarrow J[y] \leq J[u] \text{ pre všetky } u(x)$$

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 4

ČÍSLO ZLOŽKY

Definujme inú funkciu $\eta(x)$ takú, že je spojitá a v hraničných bodoch intervalu

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

Nech $0 < \epsilon \ll 1$ – malé kladné číslo

Potom funkcia

$$u(x) = y(x) + \epsilon \cdot \eta(x)$$ je z okolia

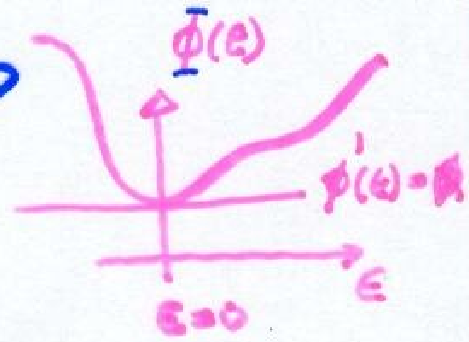
funkcie $y(x)$.

Dosaďme túto funkciu do funkcionálu:

$$J[u] = \int_a^b F(x, \underbrace{y(x) + \epsilon \cdot \eta(x)}_{u(x)}, \underbrace{y'(x) + \epsilon \cdot \eta'(x)}_{u'(x)})\, dx$$

x, $y(x)$ a $\eta(x)$ sú známe veličiny $\Rightarrow$

$$J[u] = \Phi(\epsilon)$$



Ak $\epsilon = 0 \Rightarrow J[u] = J[y] \rightarrow$ minimum

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \Phi(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} = \left[\Phi'(\epsilon)\right]_{\epsilon=0} = 0 \qquad \Rightarrow \left[\Phi''(\epsilon)\right]_{\epsilon=0} > 0$$

NÁZOV: ZVP

ČÍSLO: 5

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY

Vykonajme deriváciu:

$$\Phi'(\epsilon) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[\int_a^b \left[F(x, \underbrace{y(x) + \epsilon \eta(x)}_{u(x)}, \underbrace{y'(x) + \epsilon \eta'(x)}_{u'(x)})\right] dx\right] =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial \epsilon}\right] dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(y(x) + \epsilon \eta(x)\right) = \eta(x)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \epsilon} = \eta'(x) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(y'(x) + \epsilon \eta'(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial u'}\cdot \eta'(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u}\cdot \eta(x)\, dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'}\cdot \eta'(x)\, dx \qquad (*)$$

Integrácia per-partes druhého člena rovnice (*)

$$\int_a^b \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}}_{U} \cdot \underbrace{\eta'(x)}_{V'}\, dx = \left[U.V\right]_a^b - \int_a^b U'.V\, dx$$

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 6

ČÍSLO ZLOŽKY

$$U' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) \qquad V = \eta(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \eta'(x)\,dx}_{UV'} = \underbrace{\left[\overbrace{\frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \eta(x)}^{U \cdot V}\right]_a^b}_{0 \quad \eta(a) = \eta(b) \overset{!}{=} \emptyset} - \int_a^b \overbrace{\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) \cdot \eta(x)\right.}^{U'V} dx$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \cdot \eta(x)\,dx$$

Pre $\epsilon = 0$ je $u(x) = y(x)$ a $\Phi'(\epsilon) = \emptyset$

$$\Rightarrow \left[\Phi'(\epsilon)\right]_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \cdot \eta(x)\,dx = \emptyset$$

Ak $\eta(x) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \emptyset$$

Eulerova diferenciálna rovnica

$\Rightarrow$ Aby $u(x) = y(x)$ minimalizovalo funkcionál $J[u]$ musí byť splnená EDR !! (Nutná podmienka)

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 7

ČÍSLO ZLOŽKY

Variácia funkcie:

$$u(x) = y(x) + \epsilon \cdot \eta(x) \Rightarrow \epsilon \cdot \eta(x) = u(x) - y(x) = \delta u(x)$$

$$u(x) = y(x) + \delta u(x)$$

δ – znak variácie (virtuálnej zmeny, odchýlky, ..)

$\delta u(x)$ – zmena, odchýlka funkcie $y(x)$ od stacionarného stavu

$$\delta u(x) = \epsilon \cdot \eta(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[u(x)\right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[y(x) + \epsilon \cdot \eta(x)\right] = \eta(x) \Rightarrow$$

$$\delta u(x) = \epsilon \underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial \epsilon}}_{\eta(x)}$$

ϵ - malé kladné číslo

$$\left(df = \frac{\partial f}{\partial x} dx\right) \Rightarrow \text{obdoba diferenciálu}$$

Prvá variácia funkcionálu:

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, u')\,dx = \Phi(\epsilon)$$

$$\delta J[u] = \epsilon \frac{\partial \Phi(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \epsilon \cdot \Phi'(\epsilon)$$

pre $\epsilon = 0 \Rightarrow \delta[J(u)] = \emptyset \Rightarrow u \equiv y$ (minimum) !!

NÁZOV: ZVP

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 8

ČÍSLO ZLOŽKY

$$\Phi'(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \cdot \eta(x)\, dx \qquad \Big/ \cdot \epsilon$$

$$\epsilon \cdot \Phi'(\epsilon) = \delta J[u] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \cdot \underbrace{\epsilon \cdot \eta(x)}_{\delta u(x)}\, dx$$

$$\boxed{\delta J[u] = \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)}_{\text{Eulerová DR!}}\Big] \cdot \delta u(x)\, dx} \quad !!$$

I. variácia funkcionálu (variačný princíp)

=> existujú rôzne funkcionály (rôzne variácie!)

=> Aby $u(x)$ minimalizovala funkcionál

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, u')\, dx$$

musí byť

$$\delta J[u] = \emptyset \;!! \Rightarrow \text{možno}$$

vypočítať správnu funkciu $u(x)$!!

NÁZOV: ZVP

ČÍSLO: 9

PREDMET: MK

ROČNÍK:

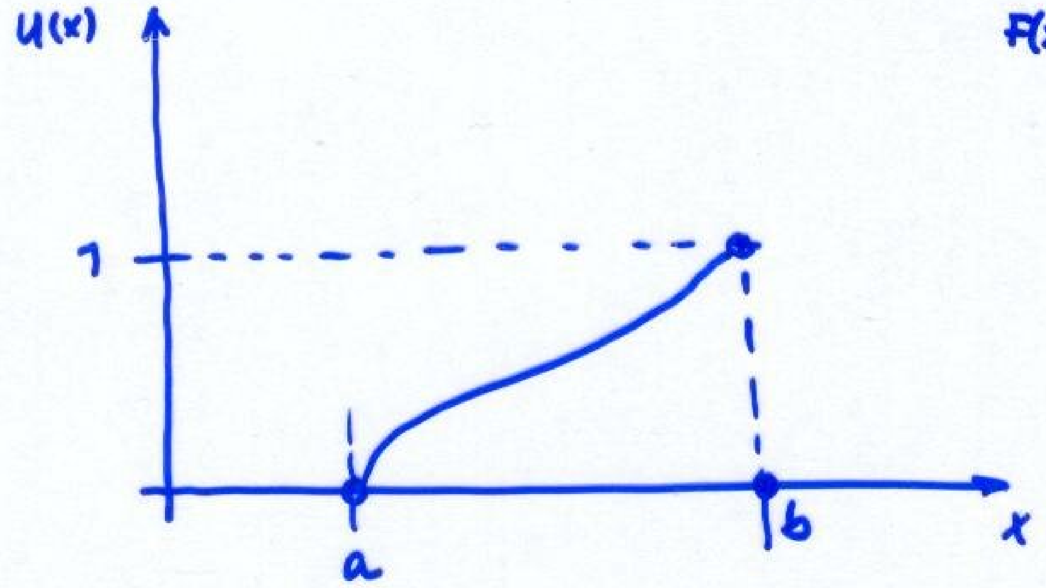
ČÍSLO ZLOŽKY

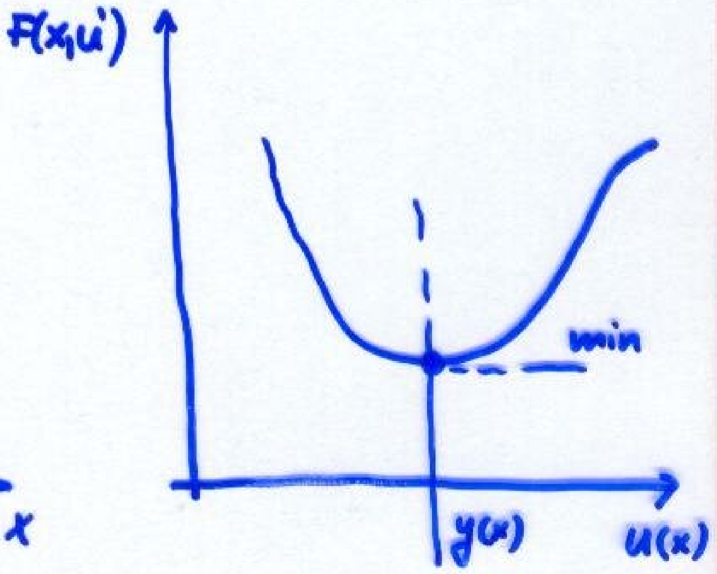
Príklad:

Nájdite funkciu $u(x) = y(x)$, ktorá minimalizuje

funkcionál $J[u] = \int_a^b \underbrace{(1+u')^2}_{F(x,u')} dx$

Okrajové podmienky: $u(a) = 0$, $u(b) = 1$





Nutná podmienka pre minimalizáciu funkcionálu:

EDR: $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Náš funkcionál: $F = F(x, u'(x))$

Pre $u = y$ má tvar: $F(x, y'(x)) = (1 + y'(x))^2$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \phi \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2(1 + y'(x))$$

NÁZOV: ZVP

ČÍSLO: 10

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY

$\Rightarrow$ EDR:

$$\phi - \frac{d}{dt}\left[2(1+y'(x))\right] = 0$$

$$y''(x) = 0$$

Riešením je:

$$y(x) = k.x + q \quad \Rightarrow y'(x) = k$$
$$y''(x) = \phi$$

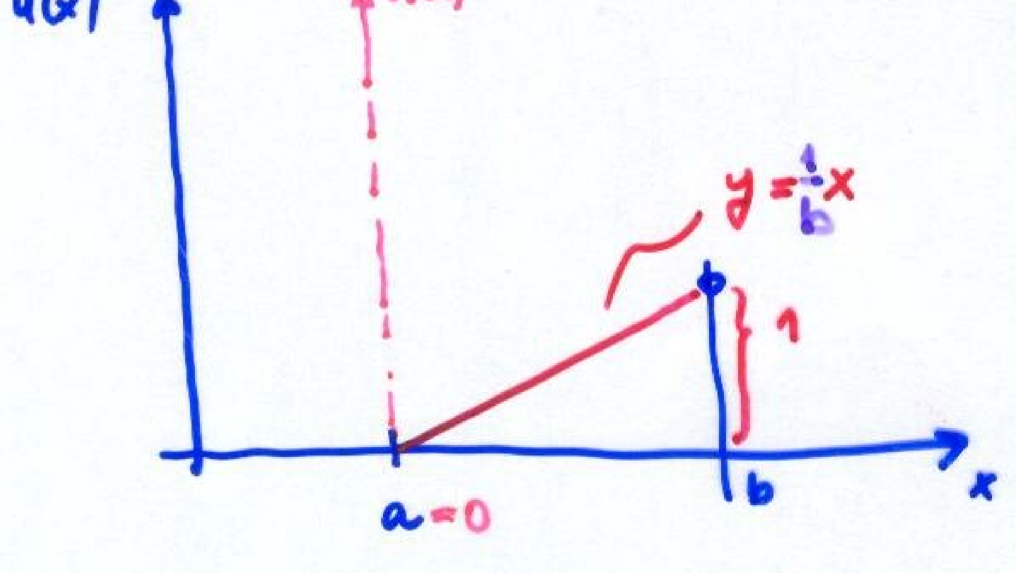
Konštanty k a q určíme z okrajových podmienok:

$\Rightarrow$ ak $a=0$

$x = a \; \ldots \; y(x) = 0 \quad \Rightarrow q = 0$

$x = b \; \ldots \; y(x) = 1 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{b}$

$\Rightarrow$ Riešením je $y = \frac{1}{b}x$



priamka

Princip virtuálnych posunutí (virtuálnych prác, minima potenciálnej energie)

Kontinuum s objemom V a povrchom S sa nachádza pod účinkom vonkajších síl (objemových K_i a plošných síl $\overset{\nu}{T}_i$ v rovnovážnom stave $\Rightarrow$ platia rovnice rovnováhy:

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + K_i = 0 \quad ; \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

pričom platí Cauchyho formula: $\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji} \nu_j$, a

zovšeobecnený zákon (Hookeov) : $\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

- teleso sa pružne deformovalo a jeho jednotlivé hmotné body sa pusunuli o vektor posunutia u_i. Stav telesa je daný tenzormi napätia τ_{ij} a deformácie ε_{ij}, vektorovým poľom posunutia u_i a jeho gradientom $\epsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} = u_{i,j}$

Okrajové podmienky : povrch telesa $S = S_\tau + S_u$, čiže : na časti S_u sú predpísané posunutia

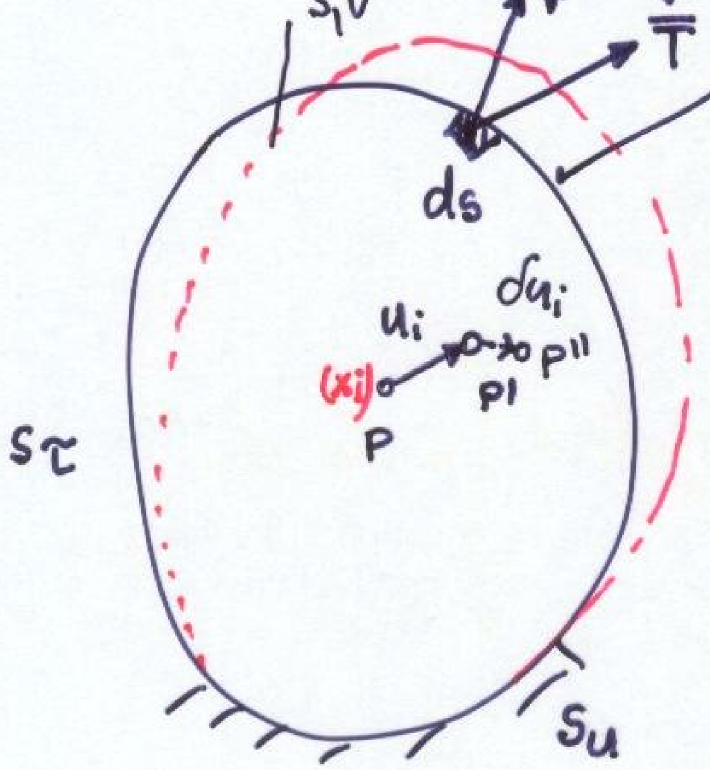
$$u_i = u_i^* \quad \text{na } S_u$$

a na S_τ je predpísané vonkajšie zaťaženie:

$$\overset{\nu}{T}_i = \overset{\nu}{T}{}_i^* \quad \text{na } S_\tau$$

teda: $dF_i = \overset{\nu}{T}{}_i^* dS_\tau$, kde $\overset{\nu}{T}{}_i^*$ je vektor napätia v miestach pôsobenia vonkajších plošných síl.

Vychýlme kontinuum z rovnovážnej polohy o virtuálne (myslené – malé pružné) posunutia δu_i



deformované teleso v stave $u_i;\ \epsilon_{ij};\ \epsilon_{ji},\ \tau_{ij}$

Platí: $\delta u_i = 0$ na S_u

a $\delta u_i \neq 0$ na S_τ

Vonkajšie sily (K_i a $\overset{\nu}{T}_i^*$) konajú na virtuálnych posunutiach δu_i virtuálnu prácu δW

Platí:
$$\delta W = \delta W_{S\tau} + \delta W_V$$
$$\delta W = \int_{S^\tau} \overset{\nu}{T}_i^* \,\delta u_i \,dS + \int_V K_i \,\delta u_i \,dV$$

Pre prácu plošných síl možno písať:

$$\int_{S^\tau} \overset{\nu}{T}_i^* \,\delta u_i \,dS \overset{!}{=} \int_S \overset{\nu}{T}_i \,\delta u_i \,dS$$, lebo všade

okrem S^τ je táto práca $= 0$ ($\delta u_i = 0$ na S_u)

Potom:
$$\int_S \overset{\nu}{T}_i \,\delta u_i \,dS = \int_S \tau_{ji} \nu_j \,\delta u_i \,dS = \int_S (\tau_{ji}\,\delta u_i)\,\nu_j \,dS =$$
$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ji}\,\delta u_i)\,dV = \int_V \Bigg(\underbrace{\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}_{-K_i} \delta u_i + \tau_{ji} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\delta u_i}_{\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \delta \epsilon_{ij}} \Bigg) dV \Rightarrow$$

$$\int_S \overset{v}{T}_i \, \delta u_i \, dS = -\int_V K_i \, \delta u_i \, dV + \int_V \tau_{ji} \, \delta \epsilon_{ij} \, dV$$

Potom virtuálna práca:

$$\delta W = -\cancel{\int_V K_i \, \delta u_i \, dV} + \overbrace{\int_V \tau_{ji} \, \delta \epsilon_{ij} \, dV}^{\delta A \text{ - deformačná energia (práca) vnútorných síl}} + \cancel{\int_V K_i \, \delta u_i \, dV}$$

resp.:

$$\underbrace{\int_{S^\tau} \overset{v}{T}_i^* \, \delta u_i \, dS + \int_V K_i \, \delta u_i \, dV}_{\delta W} = \underbrace{\int_V \tau_{ji} \, \delta \epsilon_{ij} \, dV}_{\delta A}$$

$$\underbrace{\delta W = \delta A}_{\text{princíp virtuálnych prác}}$$

Označme potenciálovú energiu deformovaného telesa:

$$\Pi = W - A$$

$$\delta \Pi = \underbrace{\delta (W - A) = \delta W - \delta A}_{\text{princíp minima potenciálnej energie}} = 0$$

Def.: 1. variácia potenciálnej energie pružného telesa v rovnovážnom stave je rovná nule!

↪ možno vypočítať vektorové pole posunutia, potom pretvorenie a napätosť.

Používaný tvar PVP v MKP:

$$\int_V \underbrace{\tau_{ij}}_{\text{SMT}} \delta \epsilon_{ij}\, dV = \int_V K_i \delta u_i\, dV + \int_{S_\tau} \overset{v}{T_i^*} \delta u_i\, dS$$

Ak $\delta \epsilon_{ij} = \underbrace{\delta \varepsilon_{ij}}_{\text{ST}} + \overbrace{\delta \omega_{ij}}^{\text{AS}}$

$$\Rightarrow \int_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij}\, dV = \int_V K_i \delta u_i\, dV + \int_{S^\tau} \overset{v}{T_i^*} \delta u_i\, dS$$

Ak $\tau_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

Potom :

$$\boxed{\int_V C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dV \overset{!}{=} \int_V K_i \delta u_i\, dV + \int_{S^\tau} \overset{v}{T_i^*} \delta u_i\, dS}$$

→ Ak vychýlime pružné teleso z rovnovážneho stavu virtuálnym poľom posunutia δu_i (spĺňajúcim okrajové podmienky), potom virtuálna práca vonkajších síl je rovná virtuálnej práci vnútorných síl.

→ Potenciálna energia pružného telesa v rovnovážnom stave je minimálna. $\delta \Pi \overset{!}{=} 0$

Súvislosť s podmienkou:

$$\delta J[\underbrace{x, u, u'}_{F}] = 0$$

Platí: $J(\underbrace{x, u, u'}_{F}] = \Pi = \int_{S^\tau} \overset{\nu}{T}_i^* u_i \, dS + \int_V K_i u_i \, dV - \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} \, dV$

1. Variácia : $\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]\right] \delta u(x) dx$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \overset{\nu}{T}_i^* u_i + K_i u_i + \underbrace{\tau_{ij} \epsilon_{ij}}_{\tau_{ij} u_i'}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \overset{\nu}{T}_i^* + K_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i'} = \tau_{ij} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial u_i'} \delta u_i\right] = \tau_{ij} \, \delta \epsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \delta J = \int_{S^\tau} \overset{\nu}{T}_i^* \delta u_i \, dS + \int_V K_i \, \delta u_i \, dV - \int_V \tau_{ij} \, \delta \epsilon_{ij} \, dV = 0$$